

Wahadło metodą RK4

A.A. Poźniak

4 maja 2016

(Materiał pomocniczy do zajęć z MIwFiT)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta - k\omega + a \cos(\omega_0 t). \quad (1)$$

Oznaczamy $\frac{d\theta}{dt} = \omega$. Teraz równanie ruchu (1) przyjmie postać układu równań

$$\begin{cases} \frac{d\omega}{dt} = \frac{g}{l} \sin \theta - k\omega + a \cos(\omega_0 t), \\ \frac{d\theta}{dt} = \omega. \end{cases} \quad (2)$$

RK: mamy tzw. zagadnienie początkowe, czyli równanie różniczkowe I rzędu:

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t) \quad (3)$$

z warunkami brzegowymi

$$y(t_0) = y_0. \quad (4)$$

Rozwiązywanie zagadnienia metodą RK4 wygląda tak:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\ t_{n+1} &= t_n + h, \end{aligned} \quad (5)$$

gdzie

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t, y_n) \\ k_2 &= f\left(t + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 &= f\left(t + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right) \\ k_4 &= f(t + h, y_n + hk_3) \end{aligned} \quad (6)$$

h jest krokiem czasowym.

W przypadku naszego wahadła, musimy zastosować schemat RK4 do *układu równań*, co tylko nieznacznie komplikuje sprawę. Trzeba zauważyć, że

$$\begin{aligned}\omega' &= f_1(\omega, \theta, t) = -\frac{g}{l} \sin \theta - k\omega + a \cos(\omega_0 t). \\ \theta' &= f_2(\omega, \theta, t) = f_2(\omega, 0, t) = \omega.\end{aligned}\tag{7}$$

Teraz jedyna trudność to tak wyrazić równania (5) i (6), żeby rozwiązać układ (2). Potrzebne będą DWA KOMPLETY liczb k_i . Nazwijmy je k_{11} , k_{12} , k_{13} , k_{14} dla funkcji f_1 oraz k_{21} , k_{22} , k_{23} , k_{24} odpowiednio dla funkcji f_2 .