Politechnika Poznańska

Adam Meissner

Adam.Meissner@put.poznan.pl

http://www.man.poznan.pl/~ameis

SZTUCZNA INTELIGENCJA

Podstawy logiki pierwszego rzędu

Literatura

[1] Ben-Ari M., *Logika matematyczna w informatyce*, WNT, Warszawa, 2006.

[2] Marciszewski W. (red.), *Logika formalna; zarys encyklopedyczny z zastosowaniem do informatyki i lingwistyki*, PWN, Warszawa, 1987.

[3] Nilsson U., Małuszyński J., Logic, Programming and Prolog (2ed), John Wiley & Sons Ltd, 1995.

JĘZYK LOGIKI PIERWSZEGO RZĘDU

SKŁADNIA

Def. (alfabet)

Alfabet jest zbiorem, do którego należą następujące symbole:

1. Stałe indywiduowe
   $k_1, k_2, \ldots$
2. Zmienne indywiduowe
   $x_1, x_2, \ldots$
3. Symbole funkcyjne n-argumentowe (n $>$ 0)
   $f_1, f_2, \ldots$
4. Symbole predykatowe n-argumentowe (n $\geq$ 0)
   $p_1, p_2, \ldots$
5. Symbole logiczne
   - spójniki: $\sim$ (negacja), $\wedge$ (koniunkcja),$\vee$ (alternatywa), $\leftarrow$ (implikacja), $\leftrightarrow$ (równoważność),
   - kwantyfikatory: $\forall$ (ogólny), $\exists$ (szczegółowy).
6. Symbole interpunkcyjne: nawiasy, przecinek

Def. (zbiór termów)

Zbiór termów jest najmniejszym zbiorem spełniającym warunki:

1. Stałe indywiduowe są termami.
2. Zmienne indywiduowe są termami.
3. Jeżeli f jest n-argumentowym symbolem funkcyjnym a $t_1,\ldots,t_n$ są termami, to $f(t_1,\ldots,t_n)$ jest termem.

Term w postaci symbolu funkcyjnego z argumentami nazywa się ***termem złożonym***.

Def. (formuła atomowa)

Jeżeli p jest n-argumentowym symbolem predykatowym a $t_1,...,t_n$ są termami, to $p(t_1,...,t_n)$ jest *formułą atomową* (***atomem***).

Def. (zbiór formuł, formuła złożona)

Zbiór *formuł* jest najmniejszym zbiorem spełniającym warunki:

1. Formuły atomowe są formułami.
2. Jeżeli F jest formułą, to formułą jest $\sim F$.
3. Jeżeli F oraz G są formułami, to są nimi: $F \wedge G$, $F \vee G$, $F \leftarrow G$, $F \leftrightarrow G$.
4. Jeżeli F jest formułą, Q kwantyfikatorem a x zmienną, to formułą jest również $(Q\ x)\ F$.

Formuły nie będące atomami określa się mianem ***formuł złożonych***.

Def. (zasięg kwantyfikatora)

Jeżeli F jest formułą, Q kwantyfikatorem a x zmienną, to formułę F nazywa się *zasięgiem kwantyfikatora* Q w formule $(Q\ x)\ F$. Zakłada się przy tym, że zmienna x nie znajduje się w zasięgu żadnego kwantyfikatora wchodzącego w skład formuły F.

Def. (zmienna wolna, zmienna związana)

Niech $G = (Q\ x)\ F$. Mówi się, że *kwantyfikator* Q *wiąże zmienną* x *w formule* G. Wszelkie wystąpienia zmiennej x w formule G nazywa się *wystąpieniami związanymi*, zaś x określa się mianem *zmiennej związanej w* G. Jeżeli pewna zmienna nie jest związana w rozpatrywanej formule, wówczas nazywa się ją *zmienną wolną w* tej *formule*, a wszystkie jej wystąpienia w są *wystąpieniami wolnymi*.

Def. (ogólne, szczegółowe zamknięcie formuły, formuła zamknięta)

Niech F będzie formułą, zaś $x_1, ..., x_n$ są wszystkimi zmiennymi wolnymi w formule F. Formułę **$(\forall\, x_1) ...$ $(\forall\, x_n)\, F$**, oznaczaną jako **$(\forall)\, F$**, nazywa się *ogólnym zamknięciem formuły F*, zaś formułę **$(\exists\, x_1) ... (\exists\, x_n)\, F$**, oznaczaną jako **$(\exists)\, F$**, nazywa się *szczegółowym zamknięciem formuły F. Formułą zamkniętą* (inaczej *zdaniem*) jest formuła, która nie zawiera zmiennych wolnych.

SEMANTYKA

Def. (interpretacja formuły atomowej)

Interpretacją formuły atomowej F nazywa się parę (D, Φ), gdzie D (dziedzina) jest niepustym zbiorem, zaś Φ jest funkcją przyporządkowującą stałym oraz symbolom funkcyjnym i predykatowym występującym w F wartości, zgodnie następującymi regułami:

1. Każdemu symbolowi stałej indywiduowej przypisany jest jeden element z D.
2. Każdemu n-argumentowemu symbolowi funkcyjnemu f przyporządkowane jest odwzorowanie D^n w D.
3. Każdemu n-argumentowemu symbolowi predykatowemu p przyporządkowany jest pewien zbiór $\Phi(p)$ będący podzbiorem D^n .

Def. (wartościowanie zmiennych)

Wartościowaniem zmiennych w interpretacji $I = (D, \Phi)$ jest każda funkcja v określona na zbiorze zmiennych indywiduowych, taka że dla każdej zmiennej x, $v(x) \in D$. Niech $AS(I)$ będzie zbiorem wszystkich wartościowań zmiennych w interpretacji I i niech $AS_{v,x}(I) \subset AS(I)$ oznacza zbiór wszystkich wartościowań zmiennych, różniących się tylko dla zmiennej x a w pozostałych przypadkach równych v.

Def. (wartość termu)

Niech t będzie dowolnym termem. *Wartość termu* $[t]_{I,V}$ przy ustalonej interpretacji I oraz wartościowaniu zmiennych $v \in AS(I)$ określa się następująco:

1. $[k]_{I,v} = \Phi(k)$,
2. $[x]_{I,v} = v(x)$,
3. $[f(t_1,...,t_n)]_{I,v} = \Phi(f)([t_1]_{I,v},...,[t_n]_{I,v})$.

Def. (wartość logiczna)

W logice pierwszego rzędu wyróżnia się dwie wartości logiczne: ***prawdę*** i ***fałsz***. W charakterze oznaczeń prawdy i fałszu używa się odpowiednio liter ***t*** i ***f***.

Def. (wartość formuły)

Jeżeli $I = (D, \Phi)$ jest pewną interpretacją, $v \in AS(I)$ jest wartościowaniem zmiennych, wówczas wartość formuły atomowej $[p(t_1,...,t_n)]$ określa się następująco

$$[p(t_1,...,t_n)]_{I,v} = \begin{cases} \boldsymbol{t}\text{, jeżeli } ([t_1]_{I,v},...,[t_n]_{I,v}) \in \Phi(\mathrm{p}) \\ \boldsymbol{f}\text{, jeżeli } ([t_1]_{I,v},...,[t_n]_{I,v}) \notin \Phi(\mathrm{p}) \end{cases}$$

Wartości formuł złożonych definiują poniższe reguły:

$$[\sim F]_{I,v} = \begin{cases} \boldsymbol{t}\text{, jeżeli } [F]_{I,v} = \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{f}\text{, jeżeli } [F]_{I,v} = \boldsymbol{t} \end{cases}$$

$$[(\forall\, x)F]_{I,v} = \begin{cases} \boldsymbol{t}\text{, jeżeli } [F]_{I,v'} = \boldsymbol{t} \text{ dla każdego } v' \in AS_{v,x}(I) \\ \boldsymbol{f}\text{, jeżeli istnieje } v' \in AS_{v,x}(I)\text{, takie że } [F]_{I,v'} = \boldsymbol{f} \end{cases}$$

$$[(\exists\, x)F]_{I,v} = \begin{cases} \boldsymbol{t}\text{, jeżeli istnieje } v' \in AS_{v,x}(I)\text{, takie że } [F]_{I,v'} = \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{f}\text{, jeżeli } [F]_{I,v'} = \boldsymbol{f} \text{ dla każdego } v' \in AS_{v,x}(I) \end{cases}$$

$F \wedge G$		
$F \setminus G$	t	f
t	t	f
f	f	f

$F \vee G$		
$F \setminus G$	t	f
t	t	t
f	t	f

$F \leftarrow G$		
$F \setminus G$	t	f
t	t	t
f	f	t

$F \leftrightarrow G$		
$F \setminus G$	t	f
t	t	f
f	f	t

Def. (spełnianie, spełnialność, prawdziwość, model, tautologia)

1. Formuła F *jest spełniona* przy interpretacji I oraz wartościowaniu $v \in AS(I)$ wtw, gdy $[F]_{I,\, v} = t$. Formuła F jest *spełnialna* wtw gdy istnieje taka interpretacja I oraz wartościowanie $v \in AS(I)$, że $[F]_{I,\, v} = t$.
2. Formuła F *jest prawdziwa przy interpretacji I* (*I spełnia F*, *I jest modelem dla F*) wtw, gdy $[F]_{I,\, v} = t$ dla każdego wartościowania zmiennych $v \in AS(I)$.
3. Formuła F *jest prawdziwa* (*tautologia*) wtw, gdy formuła F jest prawdziwa przy każdej interpretacji.

Def. (falsyfikowalność, fałszywość, kontrtautologia)

1. Formuła F *jest falsyfikowalna* przez interpretację I wtw, gdy istnieje takie wartościowanie $v \in AS(I)$, że$[F]_{I,\, v} = f$.
2. Formuła F jest *fałszywa przy interpretacji I* wtw, gdy $[F]_{I,\, v} = f$ dla każdego wartościowania zmiennych $v \in AS(I)$.
3. Formuła F *jest fałszywa* (*niespełnialna*, *kontrtautologia*) wtw, gdy jest fałszywa przy każdej interpretacji.

Def. (konsekwencja logiczna)

Niech $\Psi = \{F_1, ..., F_n\}$ będzie zbiorem formuł. Formuła G jest *konsekwencją logiczną* zbioru formuł Ψ (ozn. $\Psi \vDash G$), jeżeli każdy model dla formuły $F_1 \wedge ... \wedge F_n$ jest także modelem dla G. Jeżeli $\Psi = \{F\}$, wtedy relacja logicznej konsekwencji zachodzi między formułami $F \vDash G$.

SYSTEM AKSJOMATYCZNO-DEDUKCYJNY

Def. (teoria, twierdzenie teorii)

Teorią pierwszego rzędu T (w skrócie *teorią*) nazywa się zbiór zdań zamknięty ze względu na relację konsekwencji logicznej, tj. dla dowolnego zdania F, jeżeli $T \models F$ to $F \in T$. Każdy element teorii nazywa się *twierdzeniem* tej *teorii*.

Def. (zbiór aksjomatów teorii)

Zbiorem aksjomatów A teorii T nazywa się podzbiór teorii T zbudowany ze zdań o takiej własności, że $T = \{F \mid A \models F\}$.

Zbiór aksjomatów dowolnej teorii można w ogólności podzielić na dwa rozłączne podzbiory. Pierwszy z nich (A_L) składa się z *aksjomatów logicznych*, czyli tautologii. Drugi zbiór (A_S) tworzą *aksjomaty pozalogiczne*, zwane inaczej *aksjomatami specyficznymi teorii T*. Opisują one fragment rzeczywistości, do którego odnosi się dana teoria.

Def. (reguła wnioskowania)

Regułą wnioskowania nazywa się przekształcenie formuł $P_1, \ldots, P_m$, w formuły $W_1, \ldots, W_n$, takie, że $\{P_1, \ldots, P_m\} \models W_1 \wedge \ldots \wedge W_n$. Regułę wnioskowania zapisuje się jako

$$\frac{P_1, \ldots, P_m}{W_1, \ldots, W_n}$$

Formuły $P_1, \ldots, P_m$ nazywa się *przesłankami*, natomiast formuły $W_1, \ldots, W_n$ określa się jako *wnioski*.

Def. (wywód)

Niech S będzie dowolnym zbiorem formuł. *Wywodem* lub *wyprowadzeniem ze zbioru S* nazywa się dowolny ciąg formuł, którego każdy wyraz G spełnia co najmniej jeden z trzech warunków: (1) $G \in A_L$, (2) $G \in S$, (3) G można skonstruować poprzez zastosowanie jakiejś reguły wnioskowania do przesłanek będących formułami poprzedzającymi G w rozpatrywanym ciągu.

Def. (wywód formuły, wyprowadzalność)

Wywodem formuły F ze zbioru S nazywa się dowolny wywód ze zbioru *S*, którego ostatnim elementem jest formuła *F*, co oznacza się jako $S \vdash F$. O formule *F* mówi się, że jest *wyprowadzalna* lub *wywodliwa* ze zbioru *S*, a między formułą *F* oraz zbiorem *S* zachodzi *relacja wywodzenia*.

Def. (dowód formuły, formuła dowodliwa)

Dowodem formuły F w teorii T nazywa się wywód formuły *F* ze zbioru aksjomatów specyficznych tej teorii, tj. $A_S \vdash F$. O formule *F* mówi się, że jest *dowodliwa w teorii T*.

Def. (poprawność i pełność)

Niech *F* będzie dowolną formułą i niech *T* będzie dowolną teorią ze zbiorem aksjomatów specyficznych A_S. Logika pierwszego rzędu jest *poprawna* (tj. jeżeli $A_S \vdash F$ to $A_S \models F$) i *pełna* (tj. jeżeli $A_S \models F$ to $A_S \vdash F$).

Def. (niesprzeczność teorii)

Teoria T jest niesprzeczna wtw, gdy żadna formuła fałszywa nie jest dowodliwa w teorii *T*.

Def. (dowód nie wprost)

Dowodem nie wprost formuły F w teorii T nazywa się wywód formuły fałszywej ze zbioru $T \cup \{\sim F\}$.

Def. (pełność zbioru reguł wnioskowania)

Niech *T* będzie teorią i niech *R* będzie zbiorem reguł wnioskowania tej teorii. O zbiorze *R* mówi się, że jest pełny, jeżeli każde twierdzenie teorii *T* może zostać udowodnione wyłącznie za pomocą reguł pochodzących ze zbioru *R*.

Przykład (dowód hipotezy)

oznaczenia:

- a – dowolna stała,
- x – dowolna zmienna,
- P, Q – dowolne formuły,
- $P(t)$ – dowolna formuła P, w której term t występuje co najmniej jednokrotnie,
- $P(t|s)$ – dowolna formuła P, w której wszystkie wystąpienia termu t zastąpiono termem s.

reguła odrywania:

$$\text{R1: } \frac{P,\ P \to Q}{Q}$$

reguła podstawiania:

$$\text{R2: } \frac{(\forall\ x)\ P(x)}{P(\ x \mid a\ )}$$

teoria:

A1: $(\forall$ x) (człowiek(x) $\to$ omylny(x))
A2: człowiek(sokrates)

hipoteza:

omylny(sokrates)

dowód:

D1: człowiek(sokrates) $\to$ omylny(sokrates) {R2 do A1}

D2: omylny(sokrates) {R1 do A2 i D1}

c.n.d