

Politechnika Poznańska
Instytut Informatyki

Adam Meissner

Adam.Meissner@put.poznan.pl

<http://www.man.poznan.pl/~ameis>

SZTUCZNA INTELIGENCJA

Podstawy logiki pierwszego rzędu

Literatura

- [1] Ben-Ari M., *Logika matematyczna w informatyce*, WNT, Warszawa, 2006.
- [2] Marciszewski W. (red.), *Logika formalna; zarys encyklopedyczny z zastosowaniem do informatyki i lingwistyki*, PWN, Warszawa, 1987.
- [3] Nilsson U., Małuszyński J., *Logic, Programming and Prolog* (2ed), John Wiley & Sons Ltd, 1995.

JĘZYK LOGIKI PIERWSZEGO RZĘDU

SKŁADNIA

Def. (alfabet)

Alfabet jest zbiorem, do którego należą następujące symbole:

1. Stałe indywidualne

k_1, k_2, \dots

2. Zmienne indywidualne

x_1, x_2, \dots

3. Symbole funkcyjne n -argumentowe ($n > 0$)

f_1, f_2, \dots

4. Symbole predykatowe n -argumentowe ($n \geq 0$)

p_1, p_2, \dots

5. Symbole logiczne

- spójniki: \sim (negacja), \wedge (koniunkcja), \vee (alternatywa),
 \leftarrow (implikacja), \leftrightarrow (równoważność),
- kwantyfikatory: \forall (ogólny), \exists (szczegółowy).

6. Symbole interpunkcyjne: nawiasy, przecinek

Def. (zbiór termów)

Zbiór termów jest najmniejszym zbiorem spełniającym warunki:

1. Stałe indywidualne są termami.

2. Zmienne indywidualne są termami.

3. Jeżeli f jest n -argumentowym symbolem funkcyjnym a t_1, \dots, t_n są termami, to $f(t_1, \dots, t_n)$ jest termem.

Term w postaci symbolu funkcyjnego z argumentami nazywa się **termem złożonym**.

Def. (formuła atomowa)

Jeżeli p jest n -argumentowym symbolem predykatowym a t_1, \dots, t_n są termami, to $p(t_1, \dots, t_n)$ jest *formułą atomową (atomem)*.

Def. (zbiór formuł, formuła złożona)

Zbiór *formuł* jest najmniejszym zbiorem spełniającym warunki:

1. Formuły atomowe są formułami.
2. Jeżeli F jest formułą, to formułą jest $\sim F$.
3. Jeżeli F oraz G są formułami, to są nimi: $F \wedge G$, $F \vee G$, $F \leftarrow G$, $F \leftrightarrow G$.
4. Jeżeli F jest formułą, Q kwantyfikatorem a x zmienną, to formułą jest również $(Q x) F$.

Formuły nie będące atomami określa się mianem *formuł złożonych*.

Def. (zasięg kwantyfikatora)

Jeżeli F jest formułą, Q kwantyfikatorem a x zmienną, to formułę F nazywa się *zasięgiem kwantyfikatora Q w formule $(Q x) F$* . Zakłada się przy tym, że zmienna x nie znajduje się w zasięgu żadnego kwantyfikatora wchodzącego w skład formuły F .

Def. (zmienna wolna, zmienna związana)

Niech $G = (Q x) F$. Mówi się, że *kwantyfikator Q wiąże zmienną x w formule G* . Wszelkie wystąpienia zmiennej x w formule G nazywa się *wystąpieniami związanymi*, zaś x określa się mianem *zmiennej związanej w G* . Jeżeli pewna zmienna nie jest związana w rozpatrywanej formule, wówczas nazywa się ją *zmienną wolną w tej formule*, a wszystkie jej wystąpienia w są *wystąpieniami wolnymi*.

Def. (ogólne, szczegółowe zamknięcie formuły, formuła zamknięta)

Niech F będzie formułą, zaś x_1, \dots, x_n są wszystkimi zmiennymi wolnymi w formule F . Formułę $(\forall x_1) \dots (\forall x_n) F$, oznaczaną jako $(\forall) F$, nazywa się *ogólnym zamknięciem formuły F* , zaś formułę $(\exists x_1) \dots (\exists x_n) F$, oznaczaną jako $(\exists) F$, nazywa się *szczegółowym zamknięciem formuły F* . *Formułą zamkniętą (inaczej zdaniem)* jest formuła, która nie zawiera zmiennych wolnych.

SEMANTYKA

Def. (interpretacja formuły atomowej)

Interpretacją formuły atomowej F nazywa się parę (D, Φ) , gdzie D (dziedzina) jest niepustym zbiorem, zaś Φ jest funkcją przyporządkowującą stałym oraz symbolom funkcyjnym i predykatowym występującym w F wartości, zgodnie następującymi regułami:

1. Każdemu symbolowi stałej indywidualowej przypisany jest jeden element z D .
2. Każdemu n -argumentowemu symbolowi funkcyjnemu f przyporządkowane jest odwzorowanie D^n w D .
3. Każdemu n -argumentowemu symbolowi predykatowemu p przyporządkowany jest pewien zbiór $\Phi(p)$ będący podzbiorem D^n .

Def. (wartościowanie zmiennych)

Wartościowaniem zmiennych w interpretacji $I = (D, \Phi)$ jest każda funkcja v określona na zbiorze zmiennych indywidualowych, taka że dla każdej zmiennej x , $v(x) \in D$. Niech $AS(I)$ będzie zbiorem wszystkich wartościowań zmiennych w interpretacji I i niech $AS_{v,x}(I) \subset AS(I)$ oznacza zbiór wszystkich wartościowań zmiennych, różniących się tylko dla zmiennej x a w pozostałych przypadkach równych v .

Def. (wartość termu)

Niech t będzie dowolnym termem. *Wartość termu* $[t]_{I,v}$ przy ustalonej interpretacji I oraz wartościowaniu zmiennych $v \in AS(I)$ określa się następująco:

1. $[k]_{I,v} = \Phi(k)$,
2. $[x]_{I,v} = v(x)$,
3. $[f(t_1, \dots, t_n)]_{I,v} = \Phi(f)([t_1]_{I,v}, \dots, [t_n]_{I,v})$.

Def. (wartość logiczna)

W logice pierwszego rzędu wyróżnia się dwie wartości logiczne: **prawdę** i **fałsz**. W charakterze oznaczeń prawdy i fałszu używa się odpowiednio liter **t** i **f**.

Def. (wartość formuły)

Jeżeli $I = (D, \Phi)$ jest pewną interpretacją, $v \in AS(I)$ jest wartościowaniem zmiennych, wówczas wartość formuły atomowej $[p(t_1, \dots, t_n)]$ określa się następująco

$$[p(t_1, \dots, t_n)]_{I,v} = \begin{cases} \mathbf{t}, & \text{jeżeli } ([t_1]_{I,v}, \dots, [t_n]_{I,v}) \in \Phi(p) \\ \mathbf{f}, & \text{jeżeli } ([t_1]_{I,v}, \dots, [t_n]_{I,v}) \notin \Phi(p) \end{cases}$$

Wartości formuł złożonych definiują poniższe reguły:

$$[\sim F]_{I,v} = \begin{cases} \mathbf{t}, & \text{jeżeli } [F]_{I,v} = \mathbf{f} \\ \mathbf{f}, & \text{jeżeli } [F]_{I,v} = \mathbf{t} \end{cases}$$

$$[(\forall x)F]_{I,v} = \begin{cases} \mathbf{t}, & \text{jeżeli } [F]_{I,v'} = \mathbf{t} \text{ dla każdego } v' \in AS_{v,x}(I) \\ \mathbf{f}, & \text{jeżeli istnieje } v' \in AS_{v,x}(I), \text{ takie że } [F]_{I,v'} = \mathbf{f} \end{cases}$$

$$[(\exists x)F]_{I,v} = \begin{cases} \mathbf{t}, & \text{jeżeli istnieje } v' \in AS_{v,x}(I), \text{ takie że } [F]_{I,v'} = \mathbf{t} \\ \mathbf{f}, & \text{jeżeli } [F]_{I,v'} = \mathbf{f} \text{ dla każdego } v' \in AS_{v,x}(I) \end{cases}$$

$F \setminus G$	t	f
t	t	f
f	f	f

$F \setminus G$	t	f
t	t	t
f	t	f

$F \setminus G$	t	f
t	t	t
f	f	t

$F \setminus G$	t	f
t	t	f
f	f	t

Def. (spełnianie, spełnialność, prawdziwość, model, tautologia)

1. Formuła F jest *spełniona* przy interpretacji I oraz wartościowaniu $v \in AS(I)$ wtw, gdy $[F]_{I,v} = t$. Formuła F jest *spełnialna* wtw gdy istnieje taka interpretacja I oraz wartościowanie $v \in AS(I)$, że $[F]_{I,v} = t$.
2. Formuła F jest *prawdziwa przy interpretacji I* (I spełnia F , I jest modelem dla F) wtw, gdy $[F]_{I,v} = t$ dla każdego wartościowania zmiennych $v \in AS(I)$.
3. Formuła F jest *prawdziwa (tautologia)* wtw, gdy formuła F jest prawdziwa przy każdej interpretacji.

Def. (falsyfikowalność, fałszywość, kontrtautologia)

1. Formuła F jest *falsyfikowalna* przez interpretację I wtw, gdy istnieje takie wartościowanie $v \in AS(I)$, że $[F]_{I,v} = f$.
2. Formuła F jest *fałszywa przy interpretacji I* wtw, gdy $[F]_{I,v} = f$ dla każdego wartościowania zmiennych $v \in AS(I)$.
3. Formuła F jest *fałszywa (niespełnialna, kontrtautologia)* wtw, gdy jest fałszywa przy każdej interpretacji.

Def. (konsekwencja logiczna)

Niech $\Psi = \{F_1, \dots, F_n\}$ będzie zbiorem formuł. Formuła G jest *konsekwencją logiczną* zbioru formuł Ψ (ozn. $\Psi \models G$), jeżeli każdy model dla formuły $F_1 \wedge \dots \wedge F_n$ jest także modelem dla G . Jeżeli $\Psi = \{F\}$, wtedy relacja logicznej konsekwencji zachodzi między formułami $F \models G$.

SYSTEM AKSJOMATYCZNO-DEDUKCYJNY

Def. (teoria, twierdzenie teorii)

*Teorią pierwszego rzędu T (w skrócie teorią) nazywa się zbiór zdań zamknięty ze względu na relację konsekwencji logicznej, tj. dla dowolnego zdania F , jeżeli $T \models F$ to $F \in T$. Każdy element teorii nazywa się *twierdzeniem* tej teorii.*

Def. (zbiór aksjomatów teorii)

Zbiorem aksjomatów A teorii T nazywa się podzbiór teorii T zbudowany ze zdań o takiej własności, że $T = \{F \mid A \models F\}$.

Zbiór aksjomatów dowolnej teorii można w ogólności podzielić na dwa rozłączne podzbiory. Pierwszy z nich (A_L) składa się z *aksjomatów logicznych*, czyli tautologii. Drugi zbiór (A_S) tworzą *aksjomaty pozalogiczne*, zwane inaczej *aksjomatami specyficznymi teorii T* . Opisują one fragment rzeczywistości, do którego odnosi się dana teoria.

Def. (reguła wnioskowania)

Regułą wnioskowania nazywa się przekształcenie formuł P_1, \dots, P_m , w formuły W_1, \dots, W_n , takie, że $\{P_1, \dots, P_m\} \models W_1 \wedge \dots \wedge W_n$. Regułę wnioskowania zapisuje się jako

$$\frac{P_1, \dots, P_m}{W_1, \dots, W_n}$$

Formuły P_1, \dots, P_m nazywa się *przesłankami*, natomiast formuły W_1, \dots, W_n określa się jako *wnioski*.

Def. (wywód)

Niech S będzie dowolnym zbiorem formuł. *Wywodem* lub *wyprowadzeniem ze zbioru S* nazywa się dowolny ciąg formuł, którego każdy wyraz G spełnia co najmniej jeden z trzech warunków: (1) $G \in A_L$, (2) $G \in S$, (3) G można skonstruować poprzez zastosowanie jakiejś reguły wnioskowania do przesłanek będących formułami poprzedzającymi G w rozpatrywanym ciągu.

Def. (wywód formuły, wyprowadzalność)

Wywodem formuły F ze zbioru S nazywa się dowolny wywód ze zbioru S , którego ostatnim elementem jest formuła F , co oznacza się jako $S \vdash F$. O formule F mówi się, że jest *wyprowadzalna* lub *wywodliwa* ze zbioru S , a między formułą F oraz zbiorem S zachodzi *relacja wywodzenia*.

Def. (dowód formuły, formuła dowodliwa)

Dowodem formuły F w teorii T nazywa się wywód formuły F ze zbioru aksjomatów specyficznych tej teorii, tj. $A_S \vdash F$. O formule F mówi się, że jest *dowodliwa w teorii T* .

Def. (poprawność i pełność)

Niech F będzie dowolną formułą i niech T będzie dowolną teorią ze zbiorem aksjomatów specyficznych A_S . Logika pierwszego rzędu jest *poprawna* (tj. jeżeli $A_S \vdash F$ to $A_S \models F$) i *pełna* (tj. jeżeli $A_S \models F$ to $A_S \vdash F$).

Def. (niesprzeczność teorii)

Teoria T jest *niesprzeczna* wtw, gdy żadna formuła fałszywa nie jest dowodliwa w teorii T .

Def. (dowód nie wprost)

Dowodem *nie wprost* formuły F w teorii T nazywa się wywód formuły fałszywej ze zbioru $T \cup \{\sim F\}$.

Def. (pełność zbioru reguł wnioskowania)

Niech T będzie teorią i niech R będzie zbiorem reguł wnioskowania tej teorii. O zbiorze R mówi się, że jest *pełny*, jeżeli każde twierdzenie teorii T może zostać udowodnione wyłącznie za pomocą reguł pochodzących ze zbioru R .

Przykład (dowód hipotezy)

oznaczenia:

- a – dowolna stała,
- x – dowolna zmienna,
- P, Q – dowolne formuły,
- $P(t)$ – dowolna formuła P , w której term t występuje co najmniej jednokrotnie,
- $P(t|s)$ – dowolna formuła P , w której wszystkie wystąpienia termu t zastąpiono termem s .

reguła odrywania:

$$R1: \frac{P, P \rightarrow Q}{Q}$$

reguła podstawiania:

$$R2: \frac{(\forall x) P(x)}{P(x|a)}$$

teoria:

A1: $(\forall x) (\text{człowiek}(x) \rightarrow \text{omylny}(x))$

A2: $\text{człowiek}(\text{sokrates})$

hipoteza:

$\text{omylny}(\text{sokrates})$

dowód:

D1: $\text{człowiek}(\text{sokrates}) \rightarrow \text{omylny}(\text{sokrates})$ {R2 do A1}

D2: $\text{omylny}(\text{sokrates})$ {R1 do A2 i D1}

c.n.d